06/11/2017

Μάθημα 8ο

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ | Π.Α.Τ. Cauchy | Ύπαρξη Μονοσήμαντων λύσεων

Παράδειγμα 1

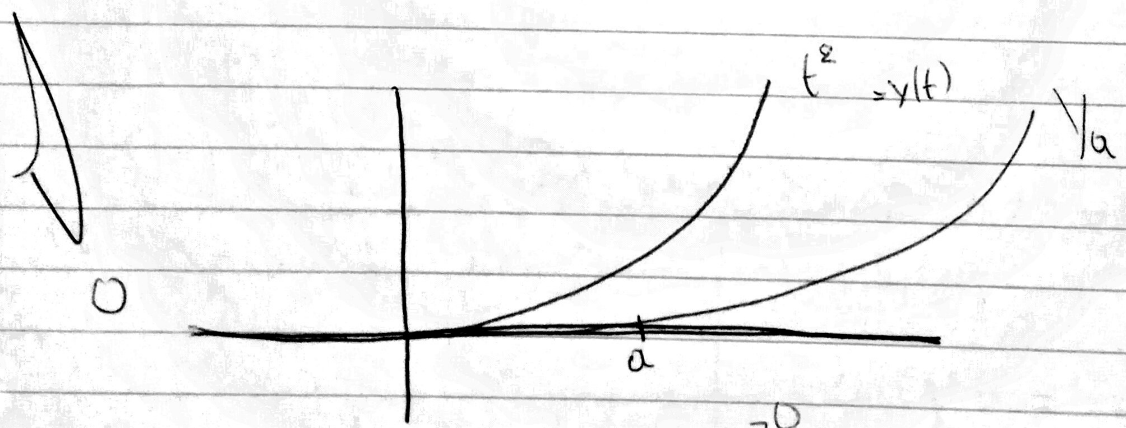
$y' = 2\sqrt{y} \qquad y(0) = 0$

χωριζόμενων / $y \geq 0$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow y(t) = t^2 \qquad t \geq 0$$

(Αν $t<0$: $y' = 2\sqrt{y} \Rightarrow 2t = 2\sqrt{t^2} = 2|t| \Rightarrow$
$t = |t|$ → αρνητικό → άτοπο)

Μια λύση είναι η μηδενική



$a>0$

έχει κι άλλες λύσεις : $y_a(t) = \begin{cases} 0 & , t<a \\ (t-a)^2 & , t \geq a \end{cases}$

Θα πρέπει να εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα στο a.
(εδώ είναι εντάξει)

$$\lim_{t\to a^{+}} \frac{y_a(t) - y_a(a)}{t-a} = 0$$

$t > a$:

$$y_a'(t) = 2(t-a) = 2|t-a| = 2\sqrt{(t-a)^2} = 2\sqrt{y_a}$$

Άρα δημιουργήσαμε άπειρες λύσεις

(Το κάνουμε για να δείξουμε ότι το Π.Α.Τ. έχει άπειρες λύσεις)

Παράδειγμα 2

προσοχή!

$$y' = y^2 \quad \begin{cases} y(0) = a \neq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ΕΛΕΓΧΟΣ:
που ανήκουν;
τι ικανοποιούν;

$$y' y^{-2} = 1$$

$$-\frac{1}{y} = t + c_1$$

$$\frac{1}{t+c} = -y$$

$$\boxed{y = \frac{1}{c_1 - t}} \quad (*)$$

Θα δουλεύουμε σε διαστήματα

⇓

περιπτώσεις

⇓

$c_1 > t$ και $c_1 < t$

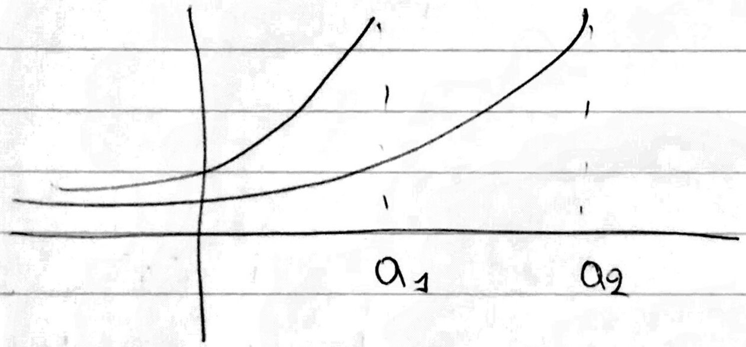
⚠ Προσοχή στο πεδίο ορισμού

$$y(0) = a \Rightarrow a = \frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{a}}$$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{a} - t} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{a}{1-at}}$$

$$y_a(t) = \frac{a}{1-at} \qquad t < \frac{1}{a}$$

Διαφορετικά π.ο. → διαφ. λύσεις



Το $y(0) = 0$ δεν ανήκει στο (*)
(Δεν το ικανοποιεί)

$\Downarrow$

Άρα είναι ιδιάζουσα λύση

$$y'(t) = \underbrace{2t^2 y^2(t) + e^{y(t)} + 5}, \quad t \in I.$$

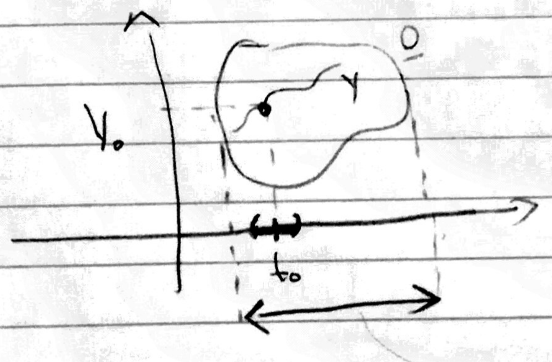
Πρέπει να το εξετάσουμε ως συνάρτηση $f(t,y)$

$$f(t,y) = 2t^2 y^2 + e^y + 5$$

προκειμένου να βλέπουμε τι γίνεται.

(Το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του συνόλου στο οποίο ανήκει το t και του συνόλου στο οποίο ανήκει το y ($\Box \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$))

παραγωγίσιμη => λεία η καμπύλη



Το πεδίο ορισμού είναι φραγμένο.

Εμάς μας ενδιαφέρει ένα μικρό διάστημα $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ στο οποίο ορίζεται λύση

Ορισμός Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: \overset{\circ}{[x]} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz από $E \subseteq D_f$ αν υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\boxed{|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|}, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in E$$

(f: k-Lipschitz στο E)

συνάρτηση μιας μεταβλητής (όχι εξάρτηση από t)

Παράδειγμα

$f(t,y) = \sin y$, $y \in \mathbb{R}$ $\boxed{, t \in \mathbb{R}}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \overset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{=} |\cos\xi| \cdot |y_1 - y_2|$$

Θ.Μ.Τ. (θεώρημα μέσης τιμής) (ξ μεταξύ y_1, y_2)

$$\leq 1 \cdot |y_1 - y_2|$$

Άρα $k = 1 > 0$. Άρα Lipschitz

Τοπικότητα στη Lipschitz

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: [x] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $(t_0, x_0) \in D_f$ αν υπάρχει U: περιοχή του $(t_0 - x_0)$ τέτοια ώστε: (και $K > 0$)

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K \, |y_1 - y_2|$$

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in U$$

Πρόταση: Ας είναι $a, b > 0$ και
$S = \{ (x, y) : |t - t_0| \leq a, \; |y - y_0| \leq b \} \subseteq D_f$

Αν η f_y υπάρχει και είναι συνεχής στο S τότε η f είναι K-Lipschitz στο S με $K = \sup\limits_{(t,y) \in S} |f_y(t, y)|$

Πρόταση: Ας είναι $a > 0$ και

$R = \{ (t, y) : |t - t_0| \leq a, \; y: \text{αυθαίρετο} \} \subseteq D_f$
Αν η f_y υπάρχει και είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι K-Lipschitz στο S με $K = \sup\limits_{(t,y) \in \mathbb{R}} |f_y(t, y)|$.

Παράδειγμα

$g(x,y) = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$, $R = \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. (*)

$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = |x\cos y + \cos x| \leq |x| \cdot 1 + 1 \leq 2$

αφού $|x| \leq 1$

Το φράγμα ανεξ. των x, y.

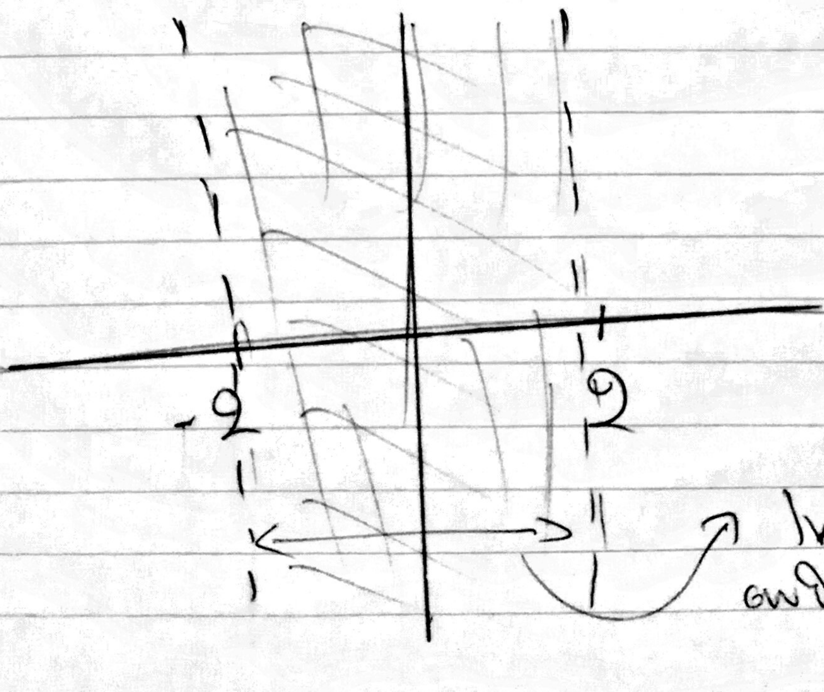
Θέλουμε για την συνθήκη (*)

Άρα φράζαμε την παράγωγο (Πήγαμε σύμφωνα με την πρώτη πρόταση) | Πήρα το φράγμα για να βρω τη σταθερά (το K)

Παράδειγμα

$g(x,y) = x^2 \,\mathrm{Arctg}\, y + e^x$, $S = \{|x| \leq 2$, y: αυθ$\}$

$\left|\frac{dg}{dy}\right| = x^2 \cdot \frac{1}{1+y^2} \leq 4$ (Δεύτερη πρόταση)



Ικανοποιεί συνθ. Lipschitz

Παράδειγμα: !

$g(x,y) = 3x y^{1/3}$ $\quad R = \{ |x| \leq a \quad , |y| \leq b \}$

Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις
Δεν ικανοποιεί Lipschitz

$x \in [-a, a] \quad , y \in [-b, b]$

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| = 3|x| \cdot |\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{0}|$$

$$\leq K |y_1 - 0|$$

έστω $y_1 > 0$ $\quad y_2 = 0$

$y_1 \to 0^+$ $\quad \boxed{3|x| \frac{\sqrt[3]{y_1}}{y_1} \leq K} \quad \forall y_1 \in (0, b]$

Άρα για $x = 1$ και $\forall y \in (0, b]$ θα πρέπει:

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt[3]{y_1}} \leq K}$$

άτοπο για $y_1 \to 0^+$
και έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο

Παράδειγμα:

$g(x,y) = 3x \cdot y^{1/3}$, $R_1 := \{ |x-5| \leq 2 , |y-3| \leq 1 \}$

$|x-5| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-5 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7$

$|y-3| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y-3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq y \leq 4.$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = \left| 3x \cdot y^{-2/3} \cdot \frac{1}{3} \right| = |x| \frac{1}{y^{2/3}} \leq 7 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Η μικρότερη τιμή του
y είναι το 2

Άσκηση 1 (iii) σελ 27

$g(x,y) = x^3 \cdot e^{-xy^2}$, $S = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1 , y : \text{αυθ} \}$

Το πεδίο ορισμού της g είναι όλο το $\mathbb{R}$.

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = \left| 2x^4 \cdot e^{-xy^2} y \right| \leq 2 \cdot \left| e^{-xy^2} \cdot y \right| \overset{(*)}{\leq} 2 \cdot 1 = 2$$

$\lim_{y \to \pm\infty} \frac{|y|}{e^{xy^2}} = 0$ $\forall x \neq 0$ Για οποιαδήποτε τιμή του x. $(*) \leq V(x)$ εξαρτ από το x $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ όχι εξαρτ από το x

Για $x = 0$ η μερική παράγωγος είναι μηδέν

$|x^3 \cdot e^{-xy^2} (-2xy)|$

$$\frac{y}{e^{xy^2}} \leq 1$$

$\rightarrow$ όρια $+0$ -0 $\rightarrow$ συνεχής $\rightarrow$ έχει φράγμα

Άσκηση 1γ. σελ 27

$$g(x,y) = \begin{cases} y(1-2x), & x \geq 0 \\ y(2x-1), & x<0 \end{cases}$$

$$S = \{(x,y),\ |x| \leq 1,\ y \text{ αυθ.}\}$$

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)|$$

ίδιο $\Rightarrow$ 2 περιπτώσεις $(x \geq 0,\ x<0)$

$x \geq 0$:

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| = |y_1(1-2x) - y_2(1-2x)| =$$

$$= |1-2x| \cdot |y_1 - y_2| \leq 3|y_1-y_2| \Rightarrow K=3$$

$x<0$

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| = |2x-1| \cdot |y_1-y_2| \leq$$

$$\leq 3|y_1-y_2| \Rightarrow K=3$$

Αν το K ήταν διαφορετικό στις 2 περιπτώσεις επιλέγω το μεγαλύτερο γιατί αναφερόμαστε σε όλο το πεδίο ορισμού.